Санкт-Петербургский Государственный университет
Кафедра «теории управления»

Яцышин Алексей Валерьевич

Выпускная квалификационная работа

Факторизация характеристических квазиполиномов линейных дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями

Направление 010400
Прикладная математика и информатика

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук, доцент
Чижова О.Н.

Санкт-Петербург
2017

Содержание

Введение

В настоящее время при изучении окружающего нас мира и построении моделей поведения объектов возникает потребность учитывать тот факт, что скорость изменения параметров экономических, биологических или физических систем может зависеть не только от состояния в данный момент времени, но и в предыдущие. В таком случае на замену обыкновенным дифференциальным уравнениям приходят системы дифференциальных уравнений с последействием, отклоняющимся или запаздывающим аргументом.

Необходимым и достаточным условием асимптотической устойчивости системы обыкновенных дифференциальных уравнений является отрицательность действительных частей всех корней характеристического полинома([6], с. 85 - 89). В случае систем дифференциальных уравнений с запаздываниями все немного труднее. Приходится оценивать отрицательность действительных частей всех корней характеристического квазиполинома([4] с. 209).

Например для системы

$$\dot{\mathrm{X}} = \mathrm{AX(t)} + \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \mathrm{B_i X(t - r_i)} \tag{1}$$

характеристический квазиполином будет иметь вид

$$\Phi(z) = det\left(zE - A - \sum_{i=1}^{m} B_i e^{-zr_i}\right) \tag{2}$$

Проблема заключается в том, что нахождение корней квазиполинома - задача нетривиальная. В общем случае, квазиполином имеет бесконечное количество корней. В связи с этим, приближенное вычисление корней квазиполинома не является подходящим методом для проверки на устойчивость.

Существует несколько методов для оценки отрицательности вещественных частей всех корней характеристического квазиполинома, например метод D-разбиений.

Метод D-разбиений заключается в поиске областей асимптотической устойчивости для коэффициентов характеристического уравнения (2) с помощью разбиения пространства его коэффициентов на области гиперповерхностями, точками которого являются квазиполиномы, имеющие, по крайней мере, один нуль на мнимой оси. (Такие области и называются областями D-разбиения)

В силу того, что нули характеристического квазиполинома (2) есть непрерывные функции его коэффициентов, изменение количества нулей в левой комплексной полуплоскости может произойти лишь при переходе через мнимую ось.

Однако уже при размерности 2 x 2 матриц A и B в уравнении (1) применение данного метода оказывается проблематичным.

В связи с этим и возникает потребность в разложении квазиполинома на более простые сомножители, для которых уже получены условия отрицательности всех корней.

Представленная работа будет посвящена выделению некоторых классов систем дифференциальных уравнений с последействием, для которых факторизация возможна.

Основы теории дифференциальных уравнений с запаздываниями изложены в работах [1,4]. Там же приведены основные понятия теории устойчивости систем с последействием, получено представление характеристического квазиполинома и его связь устойчивостью всей системы.

Свойства самих квазиполиномов хорошо изучены в работе [4]. Также в работе [4] можно найти некоторые полезные теоремы связанные с квазиполиномами. В работе [7] представлено определение понятия бистепени. В монографии [2] получены условия отрицательности вещественных частей всех корней квазиполинома бистепени (1,1) как с вещественными коэффициентами, так и с комплексными.

Сам же вопрос факторизации квазиполиномов пока слабо изучен. Можно найти применение такого подхода к проверке на асимптотическую устойчивость в работе [4]. В работах [5,10,11] проведено исследование условий одновременной триангулизируемости нескольких матриц, что является альтернативным подходом к разбиению сложной задачи на более простые, для которых уже получены результаты. И в работе [3] получены теоремы, решающие вопрос факторизации квазиполиномов для систем размерностью 2x2 и одним запаздыванием.

Основные определения

Определение 0.1([4] с. 480). Пусть h(z,w) - полином от двух переменных z и w, коэффициенты которого могут быть комплексными.

$$h(w,z) = \sum_{m,n} a_{mn} z^m w^n \qquad (0.1)$$

Назовем член $a_{rs} z^r w^s$ главным членом полинома, если $a_{rs} \neq 0$ и если для каждого другого члена $a_{mn} z^m w^n$ с $a_{mn} \neq 0$ мы имеем либо $r > m$, $s > n$, либо $r = m$, $s > n$, либо $r > m$, $s = n$.

Далее мы будем иметь дело с функциями вида $h(z, e^z)$, которые называют квазиполиномами.

Определение 0.2([7] с. 131). Если многочлен h(z,w) имеет главный член вида $a_{mn} z^m w^n$, $a_{mn} \neq 0$, то мы будем говорить, что бистепень квазиполинома $f(z) = h(z, e^z)$ равна (m,n).

В связи с приведенными определениями отметим теорему.

Теорема 0.1([8] с. 116-119) При отсутствии главного члена, функция $f(z) = h(z, e^z)$ непременно имеет бесконечное множество нулей с произвольно большими положительными действительными частями.

Вследствие теоремы 1 квазиполином с неопределенной бистепенью обязательно неустойчив, однако системы, которые мы будем рассматривать не попадают под действие этой теоремы.

Введем понятие характеристического квазиполинома.

Определение 0.3[1]**.** Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и постоянными отклонениями аргумента

$$\sum_{p=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{pj} x^{(p)}(t - r_j) = 0 \qquad (0.2)$$

где a_{pj} и r_j – вещественные постоянные.

Будем искать решение уравнения (0.2) в виде

$$x(t) = e^{zt} \qquad (0.3)$$

Подставляя (0.3) в (0.2) получим

$$\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{pj} z^p e^{-r_j z} = 0 \qquad (0.4)$$

Левую часть этого равенства называют характеристическим квазиполиномом уравнения (0.2)

$$\Phi(z) = \sum_{p=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{pj} z^p e^{-r_j z} \qquad (0.5)$$

Введем определения устойчивости и асимптотической устойчивости.

Рассмотрим систему

$$\dot{x}(t) = f\Big(t, x(t), x\big(t - r_1(t)\big), \dots, x\big(t - r_m(t)\big)\Big) \qquad (0.6)$$

Определение 0.4([1] с. 112). Решение $x(t)_{\varphi(t)}$ уравнения (0.6) называется устойчивым, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства $|\varphi(t) - \psi(t)| < \delta(\varepsilon)$ на начальном множестве следует $\left|x(t)_{\varphi(t)} - x(t)_{\psi(t)}\right| < \varepsilon$ при $t \geq t_0$, где $\psi(t)$ – любая непрерывная начальная функция. А $x(t)_{\varphi(t)}$ – решение основной начальной задачи при условии равенства $x(t) = \varphi(t)$ на начальном множестве.

Определение 0.5([1] с. 113). Устойчивое решение $x(t)_{\varphi(t)}$ называется асимптотически устойчивым, если $\lim_{t\to 0}\left|x(t)_{\varphi(t)} - x(t)_{\psi(t)}\right| = 0$ для любой непрерывной начальной функции $\psi(t)$, удовлетворяющей при достаточно малом $\delta > 0$ условию $|\varphi(t) - \psi(t)| < \delta$

Теорема 0.2([4] с. 209). Для того, чтобы система (0.1) была асимптотически устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического квазиполинома (0.4) имели отрицательные действительные части.

В общем случае, факторизация – это декомпозиция объектра в произведение факторов, которые, будучи перемноженными дадут исходный объект.

Мы будем рассматривать систему линейных дифференциальных уравнений с запаздываниями вида

$$\dot{X} = AX(t) + \sum_{i=1}^{m} B_i X(t - r_i) \tag{0.7}$$

и её характеристический квазиполином

$$\Phi(\lambda) = \det\left(\lambda E - A - \sum_{i=1}^{m} B_i e^{-\lambda r_i}\right) \tag{0.8}$$

Где матрицы A и B - вещественные, размерности n x n.

Определение 4. Под факторизацией характеристического квазиполинома системы (0.6) мы будем понимать представление (0.7) в виде

$$\Phi(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}\left(\lambda - a_i - \sum_{j=1}^{q} e^{-\lambda r_j} b_i^j\right) \tag{0.9}$$

Постановка задачи

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений с запаздываниями (0.7) и её характеристический квазиполином (0.8)

Целью настоящего исследования является:

1. Получение условий, при которых квазиполином $\Phi(\lambda)$ может быть представлен в виде
$$\Phi(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \left(\lambda - a_i - \sum_{j=1}^{q} e^{-\lambda r_j} b_i^j \right)$$
2. Определение коэффициентов a_i и b_i^j.
3. Выделение некоторого класса асимптотически устойчивых систем дифференциальных уравнений с запаздываниями.

Рассматриваться будут случаи в которых матрицы A и B имеют размерность 2x2 или больше.

Глава 1. Случай условия факторизации систем линейных дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями размерности 2 x 2.

В работе [3] были получены условия факторизации для систем вида

$$\dot{X} + AX(t) + BX(t-1) = 0 \tag{1.1}$$

где A,B – вещественные матрицы 2 x 2.

Опишем основные результаты полученные в данной работе.

Пусть f_1(z) = $\lambda_1^A + \lambda_1^B e^{-z} + z$, f_2(z) = $\lambda_2^A + \lambda_2^B e^{-z} + z$. Если возможно представление характеристического квазиполинома системы (1.1) в виде произведения квазиполиномов бистепеней (1,1), то он будет представляться в виде f_1(z) f_2(z).

Рассмотрим теорему предложенную в работе [3], там доказывается равносильность шести утверждений, мы рассмотрим лишь четыре из них.

Теорема 1.1[3].

Следующие утверждения равносильны:

1) характеристический квазиполином системы (1) представим в виде F(p)=f_1(p) f_2 (p);

2) det(A + B)=(λ_1^A + λ_1^B)(λ_2^A+ λ_2^B);

3) det(AB −BA) = 0;

4) существует базис, в котором матрицы A и B принимают верхнюю треугольную форму.

Таким образом, из данной теоремы следует, что факторизация квазиполинома возможна тогда и только тогда, когда существует базис, в котором матрицы A и B принимают верхний треугольный вид. Нумерация собственных чисел соответствует тому порядку, в котором они стоят на диагоналях соответствующих матриц.

Теорема 1.2[3].

Рассмотрим систему (1.1), пусть det(AB −BA) = 0. Для того, чтобы система (1.1) была асимптотически устойчива, необходимо и достаточно, чтобы корни квазиполиномов бистепени (1,1) f_1(z) = $\lambda_1^A + \lambda_1^B e^{-z} + z$ и f_2(z) = $\lambda_2^A + \lambda_2^B e^{-z} + z$ лежали в левой комплексной полуплоскости.

Нахождение области асимптотической устойчивости в случае вещественных или комплексных λ_i^A и λ_i^B описано в работе [2].

Замечание 1.Следует заметить, что если собственные числа одной из матриц – комплексные, то они являются комплексно сопряжёнными. Если собственные числа одной из матриц – комплексно сопряжённые, а другая матрица имеет вещественные собственные числа, то факторизация невозможна, если собственные числа второй матрицы – различны. Это следует из равенства 2 в теореме 1.1.

Также важно, что для проверки возможности факторизации характеристического квазиполинома системы (1.1) достаточно проверить выполнение всего одного условия. Если допустить, что матрицы A и B – будут иметь размерности n x n, то вряд ли получится ограничиться всего лишь одним условием.

Рассмотрим подробнее получение равносильности между утверждениями 1 и 2 в теореме 1.1.

Рассмотрим равенство

$$\Phi(\lambda) = \left(\lambda + a_1 + e^{-\lambda r}\, b_1\right)\left(\lambda + a_2 + e^{-\lambda r} b_2\right) \qquad (1.2)$$

Где $\Phi(\lambda)$ – характеристический квазиполином системы (1.1).

Чтобы равенство (1.2) выполнялось, необходимо и достаточно равенство коэффициентов при множителях $\lambda^i e^{-i\lambda r}$. Раскрыв скобки и приравняв соответствующие коэффициенты получаем следующую систему уравнений

$$\begin{array}{ll}
1: & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_1 a_2 \\
\lambda: & a_{11} + a_{22} = a_1 + a_2 \\
e^{-2\lambda r}: & b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = b_1 b_2 \\
\lambda e^{-\lambda r}: & b_{11} + b_{22} = b_1 + b_2 \\
e^{-\lambda r}: & a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21} + b_{11}a_{22} - b_{12}a_{21} = a_1 b_2 + a_2 b_1
\end{array} \qquad (1.3)$$

Нетрудно заметить, что первые два равенства эквивалентны тому, что a_1 и a_2 – являются собственными числами матрицы A, а третье и четвертое равенства эквивалентны тому, что b_1 и b_2 – являются собственными числами матрицы B. Тогда с помощью формулы матрицы суммы последнее уравнение можно привести к виду

$$\det(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = (\lambda_1^A + \lambda_1^B)(\lambda_2^A + \lambda_2^B) \tag{1.4}$$

Таким образом, мы показали равносильность утверждений 1 и 2 в теореме 1.1.

Теперь рассмотрим с систему линейных дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями

$$\dot{X} + A_0 X(t) + \sum_{i=1}^{m} A_i X(t - r_i) = 0 \tag{1.5}$$

Где $A_i, i = \overline{0, m}$ – вещественные матрицы размерности 2 x 2.

Рассмотрим равенство

$$\Phi(\lambda) = \left(\lambda + a_{01} + \sum_{i=1}^{m} e^{-\lambda r_i} a_{i1}\right)\left(\lambda + a_{02} + \sum_{i=1}^{m} e^{-\lambda r_i} a_{i2}\right) \tag{1.6}$$

Нетрудно заметить, что при переходе от одного запаздывания к двум количество уравнений в системе (1.3) увеличивается на 4, 2 из них свидетельствуют о том, что a_{i1} a_{i2} являются собственными числами матрицы A_i, а оставшиеся можно записать в виде аналогичном уравнению (1.4)

$$\begin{aligned} \det(A_0 + A_2) &= \left(\lambda_1^{A_0} + \lambda_1^{A_2}\right)\left(\lambda_2^{A_0} + \lambda_2^{A_2}\right) \\ \det(A_1 + A_2) &= \left(\lambda_1^{A_1} + \lambda_1^{A_2}\right)\left(\lambda_2^{A_1} + \lambda_2^{A_2}\right) \end{aligned} \tag{1.7}$$

При увеличении количества запаздываний с q-1 на q количество уравнений в системе аналогичной системе (1.3) увеличится на q+2, q из них свидетельствуют об отношениях связи с другими матрицами, а 2 остальных о том, что коэффициенты a_{q1} и a_{q2} в разложении (1.6) будут собственными числами матрицы A_q. Таким образом, можно сформулировать теорему.

Теорема 1.3.

Для того, чтобы характеристический квазиполином $\Phi(\lambda)$ системы (1.5) можно было представить в виде

$$\Phi(\lambda) = \left(\lambda + \lambda_1^{A_0} + \sum_{i=1}^{m} e^{-\lambda r_i} \lambda_1^{A_i}\right)\left(\lambda + \lambda_2^{A_0} + \sum_{i=1}^{m} e^{-\lambda r_i} \lambda_2^{A_i}\right) \qquad (1.9)$$

где $\lambda_1^{A_i}$ и $\lambda_2^{A_i}$ – собственные числа матриц A_i, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\det(A_i + A_j) = \left(\lambda_1^{A_i} + \lambda_1^{A_j}\right)\left(\lambda_2^{A_i} + \lambda_2^{A_j}\right) \qquad (1.10)$$

Где $i, j = \overline{0, m}$, $i \neq j$.

Следствие 1.1. Порядок следования матриц A_i в системе (1.5) не влияет на возможность или невозможность факторизации характеристического квазиполинома данной системы.

Следствие 1.2. Для того, чтобы характеристический квазиполином $\Phi(\lambda)$ системы (1.5) можно было представить в виде (1.9) необходимо и достаточно, чтобы характеристические квазиполиномы $\Phi_k(\lambda)$ систем

$$\dot{X} + A_i X(t) + A_j X(t-1) = 0 \qquad (1.11)$$

Где $0 \leq i < j \leq m$, можно было представить в виде

$$\Phi_k(\lambda) = (\lambda + \lambda_1^{A_i} + e^{-\lambda r} \lambda_1^{A_j})(\lambda + \lambda_2^{A_i} + e^{-\lambda r} \lambda_2^{A_j}) \qquad (1.12)$$

Это следует из равносильности первых двух равенств в теореме 1.1, теоремы 1.3 и следствия 1.1.

Лемма 1.1. Рассмотрим матрицы $A_1, A_2, \dots, A_m$ размерности n x n. Если существует базис в котором эти матрицы одновременно принимают верхний треугольный вид, то эти матрицы попарно одновременно триангулизуемы.

Доказательство этой леммы тривиально, пусть существует такое преобразование подобия P, что все матрицы $P^{-1} A_i P$ имеют верхний треугольный вид, тогда благодаря этому же преобразованию подобия все матрицы будут попарно одновременно триангулизуемы.

Теперь мы можем сформулировать следующую теорему, обобщающую все предыдущие результаты.

Теорема 1.4.

Следующие утверждения равносильны:

1) Характеристический квазиполином $\Phi(\lambda)$ системы (1.5) можно было представить в виде (1.9)

2) Характеристические квазиполиномы $\Phi_k(\lambda)$ систем (1.11) можно представить в виде (1.12)
3) Выполняются равенства (1.10)
4) $\det(A_i A_j - A_j A_i) = 0$, $0 \leq i < j \leq m$
5) Каждая пара матриц A_i и A_j одновременно триангулизуема.

Если же существует базис в котором все матрицы $A_i, i = \overline{0, m}$ одновременно принимают верхний треугольный вид, то это влечет за собой выполнение всех пяти пунктов предыдущей теоремы (в силу следствия 1.1 и пятого пункта теоремы). В таком случае собственные числа в разложении (1.9) будут идти в порядке их следования на диагоналях соответствующих им матриц в базисе, который приводит их к верхней треугольной форме.

Однако стоит отметить, что на практике для получения разложения (1.12) нам не достаточно проверить, например, утверждения 4 из теоремы 1.4, так как не зная базиса в котором все матрицы будут принимать верхний треугольный вид, мы не можем говорить о порядке следования собственных чисел в этом разложении. Так что помимо этого утверждения, необходимо проверить выполнимость (1.10) для выбранного порядка собственных чисел.

Глава 2. Случай n = 3.

Рассмотрим систему уравнений с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием

$$\dot{X} = AX(t) + BX(t - r) \tag{2.1}$$

где A, B – вещественные матрицы размерности 3 x 3.

Рассмотрим характеристический квазиполином системы (2.1):

$$\Phi(\lambda) = \\ = det\begin{pmatrix} \lambda - a_{11} - e^{-\lambda r}b_{11} & -a_{12} - e^{-\lambda r}b_{12} & -a_{13} - e^{-\lambda r}b_{13} \\ -a_{21} - e^{-\lambda r}b_{21} & \lambda - a_{22} - e^{-\lambda r}b_{22} & -a_{23} - e^{-\lambda r}b_{23} \\ -a_{31} - e^{-\lambda r}b_{31} & -a_{32} - e^{-\lambda r}b_{32} & \lambda - a_{22} - e^{-\lambda r}b_{22} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Теорема 1.

Для того, чтобы характеристический квазиполином системы (2.1) мог быть разложен на множители необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия (2.3):

$$det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \\ = \lambda_1^A\lambda_2^B\lambda_3^B + \lambda_1^B\lambda_2^A\lambda_3^B + \lambda_1^B\lambda_2^B\lambda_3^A$$

$$det\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \\ = \lambda_1^B\lambda_2^A\lambda_3^A + \lambda_1^A\lambda_2^B\lambda_3^A + \lambda_1^A\lambda_2^A\lambda_3^B$$

$$det(M_{11}^A + M_{11}^B) + det(M_{22}^A + M_{22}^B) + det(M_{33}^A + M_{33}^B) = \\ = (\lambda_1^A + \lambda_1^B)(\lambda_2^A + \lambda_2^B)(\lambda_3^A + \lambda_3^B)$$

Где M_{ij}^A и M_{ij}^B – миноры к элементам a_{ij} и b_{ij} соответственно.

$\boldsymbol{\lambda}_i^A$ и $\boldsymbol{\lambda}_1^B$ – собственные числа матриц A и B соответственно.

Условия (2.3) назовём *условиями согласования.*

В таком случае (2.2) представляется в виде:

$$(\lambda - \lambda_1^A - e^{-\lambda r}\lambda_1^B)(\lambda - \lambda_2^A - e^{-\lambda r}\lambda_2^B)(\lambda - \lambda_3^B - e^{-\lambda r}\lambda_3^B)$$

Доказательство:

Если характеристический квазиполином может быть разложен на множители, то он представим в виде:

$$\left(\lambda - a_1 - e^{-\lambda r}\, b_1\right)\left(\lambda - a_2 - e^{-\lambda r} b_2\right)\left(\lambda - a_3 - e^{-\lambda r} b_3\right) \qquad (2.4)$$

Где a_i, b_i – какие-то числа.

Заметим, что для равенства характеристического квазиполинома системы (2.2) квазиполиному (2.4), необходимо, чтобы коэффициенты при $\lambda^i e^{-\lambda r * j}$ должны быть равны. Таким образом, получаем 9 уравнений:

1) $$a_1 + a_1 + a_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}$$

2) $$a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 = \\ = a_{11} a_{22} + a_{11} a_{33} + a_{22} a_{33} - a_{12} a_{21} - a_{32} a_{23} \\ - a_{31} a_{13}$$

3) $$a_1 a_2 a_3 = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23} - a_{22} a_{31} a_{13} \\ - a_{33} a_{12} a_{21} - a_{11} a_{32} a_{23}$$

4) $$b_1 + b_1 + b_1 = b_{11} + b_{22} + b_{33}$$

5) $$b_1 b_2 + b_1 b_3 + b_2 b_3 = \\ = b_{11} b_{22} + b_{11} b_{33} + b_{22} b_{33} - b_{12} b_{21} - b_{32} b_{23} - b_{31} b_{13}$$

6) $$b_1 b_2 b_3 = b_{11} b_{22} b_{33} + b_{21} b_{32} b_{13} + b_{31} b_{12} b_{23} - b_{22} b_{31} b_{13} \\ - b_{33} b_{12} b_{21} - b_{11} b_{32} b_{23}$$

7) $$a_1 b_2 b_3 + b_1 a_2 b_3 + b_1 b_2 a_3 \\ = a_{11} b_{22} b_{33} + b_{21} b_{32} a_{13} + b_{31} a_{12} b_{23} - b_{22} b_{31} a_{13} \\ - b_{33} a_{12} b_{21} - a_{11} b_{32} b_{23} + b_{11} a_{22} b_{33} + a_{21} b_{32} b_{13} \\ + b_{31} b_{12} a_{23} - a_{22} b_{31} b_{13} - b_{33} b_{12} a_{21} \\ - b_{11} b_{32} a_{23} + b_{11} b_{22} a_{33} + b_{21} a_{32} b_{13} + a_{31} b_{12} b_{23} \\ - b_{22} a_{31} b_{13} - a_{33} b_{12} b_{21} - b_{11} a_{32} b_{23}$$

8) $$b_1 a_2 a_3 + a_1 b_2 a_3 + a_1 a_2 b_3 \\ = b_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} b_{13} + a_{31} b_{12} a_{23} - a_{22} a_{31} b_{13} \\ - a_{33} b_{12} a_{21} - b_{11} a_{32} a_{23} + a_{11} b_{22} a_{33} + b_{21} a_{32} a_{13} \\ + a_{31} a_{12} b_{23} - b_{22} a_{31} a_{13} - a_{33} a_{12} b_{21} \\ - a_{11} a_{32} b_{23} + a_{11} a_{22} b_{33} + a_{21} b_{32} a_{13} + b_{31} a_{12} a_{23} \\ - a_{22} b_{31} a_{13} - b_{33} a_{12} a_{21} - a_{11} b_{32} b_{23}$$

9) $$a_1b_2 + a_1b_3 + a_2b_3 + b_1a_2 + b_1a_3 + b_2a_3 =$$
$$= a_{11}b_{22} + a_{11}b_{33} + a_{22}b_{33} - a_{12}b_{21} - a_{32}b_{23} - a_{31}b_{13}$$
$$+ b_{11}a_{22} + b_{11}a_{33} + b_{22}a_{33} - b_{12}a_{21} - b_{32}a_{23} - b_{31}a_{13}$$

Заметим, что первые 6 уравнений равносильны тому, что числа a_i и b_i должны являться характеристическими числами матриц A и B соответственно. Оставшиеся 3 уравнения, которые мы называем уравнениями связи, при помощи теоремы об определителе суммы матриц [9] приводятся к уравнениям (2.3). Таким образом теорема доказана.

Замечание 2.1.

Следует отметить, что если матрицы A и B – являются треугольными, то по условиям теоремы 2.1 очевидно будут выполнятся, так как в этом случае элементы главных диагоналей матриц A и B будут характеристическими числами соответствующих матриц.

Замечание 1.3.

Получение областей устойчивости методом D-разбиений для полинома $\boldsymbol{\lambda} - a - \sum_{j=1}^{q} e^{-\lambda r_j} b_j$ является более трудоемкой задачей, поэтому далее мы сосредоточимся на случае одного запаздывания.

Глава 3. Случай n x n.

Рассмотрим систему уравнений с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием

$$\dot{X} = AX(t) + BX(t-r) \tag{3.1}$$

Где A, B – вещественные матрицы n x n.

Теорема 3.1.

Если характеристический квазиполином системы (3.1) можно представить в виде

$$\Phi(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \left(\lambda - a_i - e^{-\lambda \mathrm{r}} b_i\right) \tag{3.2}$$

То верно

$$\Phi(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \left(\lambda - \lambda_i^A - e^{-\lambda \mathrm{r}} \lambda_i^B\right) \tag{3.3}$$

Где λ_i^A и λ_i^B – собственные числа матриц A и B соответственно.

Доказательство:

Рассмотрим правую часть уравнения (3.2). Выделим из этого квазиполинома полином, в котором отсутствуют элементы $e^{-\lambda \mathrm{r}} b_i$, заметим, что этому полиному соответствует произведение $\prod_{i=1}^{n}(\lambda - a_i)$.

Рассмотрим характеристический квазиполином системы (3.1):

$$\Phi(\lambda) = det\left(\lambda \mathrm{E} - A - Be^{-\lambda \mathrm{r}} \right) \tag{3.4}$$

Также выделим из (3.4) полином, в котором отсутствуют слагаемые в которые входит $e^{-\lambda \mathrm{r}}$, нетрудно заметить, что ему будет соответствовать полином $\det(\lambda \mathrm{E} - A)$, так как для равенства (3.3) и (3.4), необходимо, чтобы коэффициенты при одинаковых степенях были равны, то тогда и коэффициенты при λ^n должны быть равны, в таком случае получаем равенство

$$\det(\lambda \mathrm{E} - A) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - a_i) \tag{3.5}$$

Таким образом, получаем, что $a_i = \lambda_i^A$, i = $\overline{1,n}$. Аналогичным образом можно показать, что $b_i = \lambda_i^B$, i = $\overline{1,n}$, ч.т.д.

Исследуем теперь уравнения связи, путём подстановок получим следующие уравнения (3.6):

$$\sum_{i\neq j} \lambda_i^A \lambda_j^B = \sum_{i\neq j} \mathrm{M}_{i^A j^B}$$

$$\sum_{i\neq j\neq q} \lambda_i^A \lambda_j^B \lambda_q^B = \sum_{i\neq j\neq q} \mathrm{M}_{i^A j^B q^B}$$

$$\sum_{i\neq j\neq q} \lambda_i^A \lambda_j^A \lambda_q^B = \sum_{i\neq j\neq q} \mathrm{M}_{i^A j^A q^B}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i_k\neq i_t\ \forall k,t=\overline{1,n}} \lambda_{i_1}^A \lambda_{i_2}^B \lambda_{i_3}^B \ldots \lambda_{i_n}^B = \sum_{i_k\neq i_t\ \forall k,t=\overline{1,n}} \mathrm{M}_{i_1^A i_2^B i_3^B \ldots i_n^B}$$

$$\sum_{i_k\neq i_t\ \forall k,t=\overline{1,n}} \lambda_{i_1}^A \lambda_{i_2}^A \lambda_{i_3}^B \ldots \lambda_{i_n}^B = \sum_{i_k\neq i_t\ \forall k,t=\overline{1,n}} \mathrm{M}_{i_1^A i_2^A i_3^B \ldots i_n^B}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i_k\neq i_t\ \forall k,t=\overline{1,n}} \lambda_{i_1}^A \lambda_{i_2}^A \lambda_{i_3}^A \ldots \lambda_{i_{n-1}}^A \lambda_{i_n}^B = \sum_{i_k\neq i_t\ \forall k,t=\overline{1,n}} \mathrm{M}_{i_1^A i_2^A i_3^A \ldots i_{n-1}^A i_n^B}$$

Где $\mathrm{M}_{i_1^A i_2^A \ldots i_q^A i_{q+1}^B \ldots i_k^B}$ – определитель матрицы, которую мы получаем путем замещения в матрице В строчек $i_1\ i_2\ \ldots i_q$ на соответствующие строчки матрицы А и последующим вычеркиванием всех строчек и столбцов, номеров которых нет в наборе $i_1^A i_2^A \ldots i_q^A i_{q+1}^B \ldots i_k^B$.

Действительно, покажем справедливость уравнения

$$\sum_{i_k\neq i_t\ \forall k,t=\overline{1,r}} \lambda_{i_1}^A \ldots \lambda_{i_q}^A \lambda_{i_{q+1}}^B \ldots \lambda_{i_r}^B = \sum_{i_k\neq i_t\ \forall k,t=\overline{1,n}} \mathrm{M}_{i_1^A \ldots i_q^A i_{q+1}^B \ldots i_k^B} \qquad (3.7)$$

Где r – размерность матриц правой части уравнения и количество множителей в каждом слагаемом левой части уравнения, а q – количество строчек в каждой матрице правой части соответствующих матрице А. Изменяя r и q мы можем получить любое уравнение системы (3.6).

Система (3.6) вытекает из необходимости равенства правых частей уравнений (3.3) и (3.4). Посмотрим на правую часть уравнения (3.3), выделим все слагаемые при $\lambda^{n-r} e^{-(\mathrm{r}-\mathrm{q})\lambda\mathrm{r}}$. Получим сумму произведений в которые первое слагаемое каждого множителя $\prod_{i=1}^{n}\left(\lambda - \lambda_i^A - e^{-\lambda\mathrm{r}}\lambda_i^B\right)$ войдет n – r раз, второе слагаемое войдёт q раз, третье слагаемое войдёт r-q раз. Разделим на $\lambda^{n-r}e^{-(\mathrm{r-q})\lambda\mathrm{r}}$ и получим

$(-1)^r \sum_{i_k \neq i_t\ \forall k,t=\overline{1,r}} \lambda_{i_1}^A \dots \lambda_{i_q}^A \lambda_{i_{q+1}}^B \dots\ \lambda_{i_r}^B$, что эквивалентно правой части. Нетрудно увидеть, что количество слагаемых в данном выражении будет равно $\mathrm{C}_n^r \mathrm{C}_r^q$.

Теперь рассмотрим характеристический квазиполином (3.4). Применим к нему теорему об определителе суммы матриц λE и $-A-Be^{-\lambda\mathrm{r}}$ [9].

Получим следующее равенство

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda) = \det(\lambda\mathrm{E}) + \sum \Delta(1) + \sum \Delta(2) + \dots + \sum \Delta(s) + \dots \\ + \sum \Delta(n-1) + det\,(-A - Be^{-\lambda\mathrm{r}}\,)\end{aligned} \tag{3.8}$$

Где $\Delta(s)$ – определитель, полученный замещением s строчек определителя второй матрицы соответствующими строчками первой матрицы. Знаки сумм означают, что мы суммируем все такие возможные сочетания.

Раскладывая $\Delta(s)$ по строчкам, соответствующим матрице λE можно заметить, что элементы характеристического квахиполинома в которых есть множитель $\lambda^{n-r}e^{-(\mathrm{r-q})\lambda\mathrm{r}}$, могут быть получены только из слагаемого $\Delta(n-r)$. Рассмотрим одну из таких матриц, пусть -A-B=C, а матрица C состоит из элементов $\mathrm{c}_{ij} = -a_{ij} - b_{ij}e^{-\lambda\mathrm{r}}$

$$\Delta(n-r) = det\begin{pmatrix} \lambda & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ c_{n-r+1,1} & \cdots & c_{n-r+1,n-r} & c_{n-r+1,n-r+1} & \cdots & c_{n-r+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,1} & \cdots & c_{n,n-r} & c_{n,n-r+1} & \cdots & c_{n,n} \end{pmatrix}$$

Раскладывая этот определитель по первым n-r строчек, получим следующее равенство (3.9)

$$\Delta(n-r) = \lambda^{n-r} * det\begin{pmatrix} c_{n-r+1,n-r+1} & \cdots & c_{n-r+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n,n-r+1} & \cdots & c_{n,n} \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda^{n-r} *$$

$$* \det\begin{pmatrix} -a_{n-r+1,n-r+1} - b_{n-r+1,n-r+1}e^{-\lambda\mathrm{r}} & \cdots & -a_{n-r+1,n} - b_{n-r+1,n}e^{-\lambda\mathrm{r}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n,n-r+1} - b_{n,n-r+1}e^{-\lambda\mathrm{r}} & \cdots & -a_{n,n} - b_{n,n}e^{-\lambda\mathrm{r}} \end{pmatrix}$$

Теперь к этому определителю применим теорему об определителе суммы[9], пусть $\bar{A}$ и $\bar{B}$ такие матрицы размерности r x r состоящие из элементов матриц A и B соответственно и верно $\Delta(n-r) = \lambda^{n-r} * \det(-\bar{A} - \bar{B}e^{-\lambda \mathrm{r}})$, получим (3.10)

$$\Delta(n-r) = \lambda^{n-r} *$$
$$* \Big(\det(-\bar{A}\,) + \sum \Delta(1) + \sum \Delta(2) + \cdots + \sum \Delta(s) + \cdots + \sum \Delta(n-1) + det\,(-\bar{B})\Big)$$

Заметим, что элементы с множителем $e^{-(\mathrm{r-q})\lambda \mathrm{r}}$ можно выделить только из $\Delta(r-q)$, раскладывая эти матрицы по строчкам, нетрудно заметить, что все слагаемые определителя $\Delta(r-q)$ будут содержать множитель $e^{-(\mathrm{r-q})\lambda \mathrm{r}}$. Таким образом получаем

$$\Delta(n-r) = \lambda^{n-r} * (\sum \Delta(r-q) + Q(\lambda))$$

Где $Q(\lambda)$ – все элементы правой части уравнения (3.10) помимо $\sum \Delta(r-q)$.

Проделывая аналогичные действия со всеми возможными $\Delta(n-r)$ из уравнения (3.8) и всеми $\Delta(r-q)$ из уравнения (3.9), выделим все слагаемые характеристического квазиполинома системы (3.1), в которых присутствует множитель $\lambda^{n-r}e^{-(\mathrm{r-q})\lambda \mathrm{r}}$. Конечную сумму можно записать в виде правой части уравнения (3.7). Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 3.2.

Для того чтобы характеристический квазиполином системы (3.1) мог быть разложен на множители вида (3.2), необходимо и достаточно выполнение условий (3.6).

В таком случае характеристический квазиполином будет представим в виде (3.3).

Замечание 3.1.

Если выполнены условия теоремы 3.1, то для проверки системы (3.1) на асимптотическую устойчивость достаточно проверить асимптотическую устойчивость квазиполиномов $\lambda - \lambda_i^A - e^{-\lambda \mathrm{r}}\lambda_i^B$, где i = $\overline{1,n}$. Области асимптотической устойчивости таких квазиполиномов можно найти в работе [2].

Замечание 3.2.

Следует заметить, что количество уравнений в системе (6) есть $\frac{(n-1)n}{2}$, а количество слагаемых в левой и правой части каждого из уравнений $C_n^r C_r^q$, где r – количество множителей каждого слагаемого левой части или размерность матриц правой части, а q – количество множителей соответствующих собственным числам матрицы A в каждом из слагаемых левой части.

Замечание 3.3.

Следует отметить (аналогично случаю n=3), что если матрицы A и B – являются треугольными, то условия теоремы 3.2 очевидно будут выполнятся, так как в этом случае элементы главных диагоналей матриц A и B будут характеристическими числами соответствующих матриц.

Замечание 3.4.

Теорема 2.1 является частным случаем теоремы 3.2.

Глава 4. Программная реализация и примеры.

Для проверки корректности доказательства теоремы 3. 2 была написана программа в символьных вычислениях на языке Python 3.6.3 с использованием библиотеки SymPy 1.1.1 [13].

Программа повторяет действия аналогичные доказательству теоремы 1 из 2 главы. В силу огромного количества символьных вычислений за 12 часов работы программы она смогла проверить теорему 3.2 только до случая n = 8.

```
n = 3
True
n = 4
True
n = 5
True
n = 6
True
n = 7
True
n = 8
True
n = 9
```

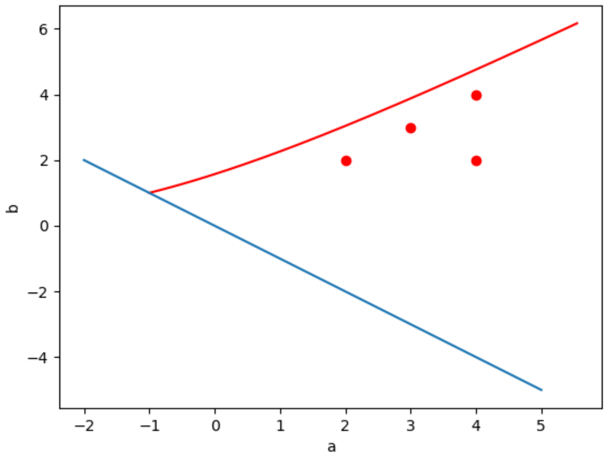
Помимо этого, была написана программа, которая проверяет возможность факторизации конкретной системы линейных дифференциальных уравнений с запаздываниями, и если это возможно, то проверяет попадание коэффициентов разложения в область асимптотической устойчивости с помощью результатов, полученных в работе [2]. Для наглядности, в случае вещественных коэффициентов разложения программа показывает на графике их расположение относительно области асимптотической устойчивости, полученной методом D-разбиений [1]. Для написания этой программы был использован язык Python 3.6.3 с использованием библиотек NumPy 1.14.3 [14] и matplotlib 2.2.2 [15].

Рассмотрим систему

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 10 & -8 \\ 0 & 4 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 3 & 8 & 10 & -4 \\ 0 & 4 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X(t-r)$$

Данная система удовлетворяет условиям замечания 3.3, так как матрицы имеют треугольный вид. Поэтому факторизация возможна. Тогда характеристический квазиполином этой системы можно представить в виде

$$\Phi(\lambda) = (\lambda - 3 - 3e^{-\lambda r})(\lambda - 4 - 4e^{-\lambda r})(\lambda - 2 - 2e^{-\lambda r})(\lambda - 2 - 4e^{-\lambda r})$$




```
factorization is possible
3.0    3.0
4.0    4.0
2.0    2.0
4.0    2.0
stable
```

Таким образом, можно сделать вывод, что данная система линейных дифференциальных уравнений асимптотически устойчива.

Рассмотрим другой пример

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 3 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix} X(t-r)$$

В данном случае факторизация невозможна и мы не можем ничего сказать об асимптотической устойчивости этой системы линейных дифференциальных уравнений с запаздываниями, действительно

```
85.54379500907268
False
50.43871531330301
False
-124.76171321932961
False
323.03459362174067
False
-144.57838863081344
False
338.3229979060265
False
factorization is impossible
```

Программа проверяет лишь первое уравнение системы (3.6) для каждого упорядочивания пар собственных чисел матриц A и B, так как оно не выполняется, то остальные проверять нет смысла.

Заключение

Таким образом, в данной работе мы расширили результаты работы [3] на случай с конечным количеством запаздываний. Помимо этого получили некоторые условия факторизации характеристических квазиполиномов систем линейных дифференциальных уравнений с несколькими запаздываниями размерности более чем 2 x 2, нашли необходимые и достаточные условия при которых эти квазиполиномы представимы в виде

$$\Phi(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \left(\lambda - a_i - \sum_{j=1}^{q} e^{-\lambda r_j} b_i^j \right)$$

Установили коэффициенты a_i и b_i^j как собственные числа матриц A и B_i соответственно.

Также была написана программа, реализующая полученные результаты.

В связи с результатами, полученными для систем размерности 2 x 2, и замечанием 3.3, в дальнейшем планируется подробно изучить вопрос одновременной триангуляции нескольких матриц и, с использованием результатов, полученных в данной работе, проверить равносильность возможности факторизации характеристического квазиполинома и одновременной триангулизуемости матриц системы линейных дифференциальных уравнений размерности n x n.

Также планируется развивать следующую идею. Собственные числа матрицы и её определитель есть непрерывные функции от её элементов. Перенесём все слагаемые каждого уравнения в системе (3.6) в левую сторону. Тогда можно предположить, что если все левые части уравнений находятся в какой-то окрестности нуля, то найдётся система линейных дифференциальных уравнений с запаздываниями для которой факторизация возможна и которая будет близка к первоначальной. Тогда и коэффициенты разложения полученной системы будут лежать в какой-то окрестности относительно первоначальных. Если получить оценки этих окрестностей, то можно будет сделать выводы об асимптотической устойчивости первоначальной системы. Изучение необходимых и достаточных условий асимптотической устойчивости семейств квазиполиномов можно найти в работе[12].

Список литературы

1. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. “Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом”, М., 1971
2. А.И. Кирьянен “Устойчивость систем с последействием и их приложения”, изд-во С.-Петербургск. ун-та, СПб., 1994.
3. М. В. Мулюков “О факторизации характеристического квазиполинома системы линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием”, *Изв. вузов. Матем.*, 2013, № 9, 38–44; *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **57**:9 (2013), 31–36.
4. Беллман Р., Кук К. “Дифференциально-разностные уравнения”, М., Мир, 1967.
5. Альпин Ю.А., Корешков Н.А. “Об одновременной триангулизуемости матриц”, Матем. заметки 68 (5), 648–652 (2000).
6. Демидович Б.П. “Лекции по математической теории устойчивости”, М., Наука, 1967.
7. Постников М.М., “Устойчивые многочлены” 2-е изд.
8. Понтрягин Л.С., “О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций”, ИАН СССР, сер. матем., 1942 г., т. 6, с. 115-134.
9. Сигорский В.П. “Математический аппарат инженера”, Техника, 1977

10. McCoy N.H. “On characteristic roots of matrix polynomials”, Bull. Amer. Math. Soc., 42 (1936), pp. 592-600

11. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ, М., Мир, 1989

12. Жабко А.П., Харитонов В.Л., “Методы линейной алгебры в задачах управления”, изд-во С.-Петербургск. ун-та, СПб., 1993

13. Sympy. http://www.sympy.org/

14. Numpy. http://www.numpy.org/

15. matplotlib. https://matplotlib.org/